EGY GYŰRŰELMÉLETI REPREZENTÁCIÓS TÉTEL ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRÓL

HOROGH EMÍLIA

Az $(n, 2)$-félgyűrű olyan $(A; f, \cdot)$ algebra, ahol f n-változós, „$\cdot$" pedig kétváltozós művelet, és teljesülnek a következő azonosságok:

$$\begin{aligned} & f(f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n), x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1}) = \\ (1) \qquad & = f(x_1, f(x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}), \ldots, x_{2n-1}) = \ldots \\ & \ldots = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, f(x_n, \ldots, x_{2n-1})); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \qquad & y f(x_1, \ldots, x_n) = f(yx_1, \ldots, yx_n), \\ & f(x_1, \ldots, x_n) y = f(x_1 y, \ldots, x_n y). \end{aligned}$$

K. GŁAZEK és B. GLEICHGEWICHT az egységelemes gyűrűk egy ismert reprezentációs tételét — nevezetesen, hogy egységelemes gyűrű beágyazható modulusának endomorfizmusgyűrűjébe (pl. [5]) — általánosította bizonyos $(n, 2)$-félgyűrűkre ([3] 4. Tétel.).

Az (A, f) algebra n-félcsoport, ha f n-változós és teljesül rá (1). Egy n-félcsoport szemi-kommutatív, ha még az

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = f(x_n, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1)$$

is teljesül. Igazolták, hogy a szemi-kommutatív n-félcsoportok kielégítik az

$$f(f(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, f(x_{n1}, \ldots, x_{nn})) = f(f(x_{11}, \ldots, x_{n1}), \ldots, f(x_{1n}, \ldots, x_{nn}))$$

azonosságot, azaz Abel-félék.

Megmutatták, hogy egy $(A; f)$ szemi-kommutatív n-félcsoport (azaz ABEL-féle n-félcsoport) endomorfizmusai $(n, 2)$ félgyűrűt alkotnak, és érvényes a következő:

1. Tétel. [3] *Legyen $(A; f, \cdot)$ $(n, 2)$-félgyűrű, $(A; f)$ szemi-kommutatív, továbbá $(A; f, \cdot)$ rendelkezzen legalább egy kancellábilis elemmel ($a \in A$ kancellábilis elem, ha $ax = ay$ és $xa = ya$ bármelyike maga után vonja $x = y$-t). Ekkor $(A; f, \cdot)$ beágyazható $(A; f)$ endomorfizmusainak $(n, 2)$-félgyűrűjébe.*

A gyűrű fogalmának további általánosításai is ismertek. Ilyen a B. I. PLOTKIN [6] és JA. V. HION [4] által bevezetett Ω-gyűrű.

Definíció. Az $(A; \Omega, \cdot)$ algebrát Ω-gyűrűnek nevezzük, ha Ω tetszőleges nem üres művelettartomány, „$\cdot$" pedig egy olyan binér művelet, amely disztributív az Ω minden elemére.

Definíció. Az $(A; \Omega)$ algebra ABEL-féle [1], ha tetszőleges $f, g \in \Omega$ m-, illetve n-változós műveletre teljesül, hogy bármely $a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn} \in A$ elemek esetén

$$f(g(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, g(a_{m1}, \ldots, a_{mn})) = g(f(a_{11}, \ldots, a_{m1}), \ldots, f(a_{1n}, \ldots, a_{mn})).$$

Lemma. [2] *Ha az* $\mathscr{A}=(A;\,\Omega)$ *algebra* ABEL-*féle, akkor endomorfizmusain elvégezve tetszőleges* Ω*-beli műveletet ismét endomorfizmust kapunk, azaz ha* $f\in\Omega$ *tetszőleges n-változós művelet és* $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in End\,\mathscr{A}$, *akkor* $f(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in End\,\mathscr{A}$, *ahol az* $f(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n):=f(a\varepsilon_1,\dots,a\varepsilon_n)$ *minden* $a\in A$*-ra.*

Definíció. Az $(A;\,\Omega,\,\cdot)$ Ω-gyűrűt ABEL-féle Ω-gyűrűnek nevezzük, ha $(A;\,\Omega)$ ABEL-féle algebra.

Megjegyezzük, hogy ez ténylegesen a klasszikus gyűrű-fogalom általánosítását jelenti, hiszen a gyűrű olyan ABEL-féle Ω-gyűrű, ahol $\Omega=\{+\}$.

2. Tétel. *Ha az* $(A;\,\Omega,\,\cdot)$ *olyan Abel-féle* Ω*-gyűrű, amelynek van kancellábilis eleme, akkor beágyazható az* $(A;\,\Omega)$ *endomorfizmusainak* Ω*-gyűrűjébe.*

Bizonyítás. A lemmából azonnal adódik, hogy az $(A;\,\Omega)$ endomorfizmusai egy $(End\,\mathscr{A};\,\Omega,\,\cdot)$ ABEL-féle Ω-gyűrűt alkotnak. Tetszőleges $r\,(\in A)$ elemmel meghatározott $\varepsilon_r\colon x\to xr$ $(x\in A)$ leképezés az $(A;\,\Omega)$ ABEL-féle algebrának endomorfizmusa, mivel tetszőleges $f\in\Omega$ n-változós művelet esetén bármely $a_1,\dots,a_n\in A$ elemre

$$f(a_1,\dots,a_n)\,\varepsilon_r=f(a_1,\dots,a_n)\,r=f(a_1r,\dots,a_nr)=f(a_1\varepsilon_r,\dots,a_n\varepsilon_r).$$

Jelölje ezen leképezések halmazát R. Először azt mutatjuk meg, hogy az $\mathscr{R}=(R;\,\Omega,\,\cdot)$ olyan Ω-gyűrű, amely rész-Ω-gyűrűje az $(End\,\mathscr{A};\,\Omega,\,\cdot)$-nak. Ehhez azt kell belátni, hogy tetszőleges $\varepsilon_{r_1},\dots,\varepsilon_{r_n}\in R$ elemekhez és $f\in\Omega$ művelethez létezik A-nak olyan eleme, hogy egy A-beli elemre az $f(\varepsilon_{r_1},\dots,\varepsilon_{r_n})$ endomorfizmust alkalmazva annak hatása megegyezik ezen elemmel való szorzással, valamint $\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}$-höz is létezik A-nak az előbbi feltételeket kielégítő eleme. Legyen az $a\in A$ tetszőleges. Ekkor

$$af(\varepsilon_{r_1},\dots,\varepsilon_{r_n})=f(a\varepsilon_{r_1},\dots,a\varepsilon_{r_n})=f(ar_1,\dots,ar_n)=af(r_1,\dots,r_n),$$

valamint

$$a(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2})=(a\varepsilon_{r_1})\,\varepsilon_{r_2}=(ar_1)\,\varepsilon_{r_2}=a(r_1r_2)=a\varepsilon_{r_1r_2},$$

tehát a keresett A-beli elemek $f(r_1,\dots,r_n)$ és r_1r_2. Ezzel igazoltuk, hogy $\mathscr{R}$ rész-Ω-gyűrűje az $(End\,\mathscr{A};\,\Omega,\,\cdot)$-nak. Annak igazolása van csak hátra, hogy $\mathscr{A}\cong\mathscr{R}$. Tekintsük az $a\to\varepsilon a$ megfeleltetést, mely az előzőek alapján nyilvánvalóan homomorfizmus. Tegyük fel, hogy $x\varepsilon_a=x\varepsilon_b$ minden $x\in A$-ra teljesül, és legyen c az $(A;\,\Omega,\,\cdot)$ egy kancellábilis eleme. Ekkor speciálisan $c\varepsilon_a=c\varepsilon_b$, amiből $a=b$ következik, azaz a megfeleltetés bijektív. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] P. M. COHN: Universal Algebra, Harper and Row, New York, Evanston, London, 1965.

[2] Б. Чакань: Об абелевых свойствох примитивных классов универсалных алгебр, Acta Sci. Math. 25(1964), 202—208.

[3] K. GŁAZEK and B. GEICHGEWICHT: Abelian n-groups, preprint.

[4] Я. В. Хион: Ω-кольцоиды, Ω-кольца и их представления, Труди моск. Мат. Общ. 14 (1965), 3—47.

[5] N. JACOBSON: The Theory of Rings, AMS, 1943.

[6] Б. И. Плоткин: Ω-полугруппы, Ω-кольца и представления, дан 149, № 5 (1963), 1037—1040.

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG EINES RINGTHEORETISCHEN SATZES

Emilia Horogh

Es ist bekannt, dass ein Ring mit Einselement sich in den Endomorphismenring seines Moduls einbetten lässt. Dieser Satz wird hier für Abelsche Ω-Ringe verallgemeinert.

ОБ ОБОБЩЕНИИ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ В ТЕОРИИ КОЛЕЦ

Э. Хорогх

Одну общеизвестную теорему о представлении колец с единицей — всякое кольцо с единицей изоморфно вкладывается в кольцо эндоморфизмов своей аддитивной структурой — обобщаем на случай Ω-колец.